Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2023»
Заключительный тур
12 февраля 2023 года
7 класс

▷ **1.** К числу 23 слева и справа подписали по одной цифре так, чтобы полученное число делилось бы на 23. Найдите все такие числа.

Решение:

$$1000 = 23 \cdot 433 + 11 = 23 \cdot 44 - 12$$

$$2000 = 23 \cdot 88 - 24 = 23 \cdot 87 - 1 = 2001 - 1 \quad 2231 = 23 \cdot 97$$

$$3000 = 23 \cdot 132 - 36 = 23 \cdot 131 - 13$$

$$4000 = 23 \cdot 176 - 48 = 23 \cdot 174 - 2 \quad 4232 = 23 \cdot 184$$

$$5000 = 23 \cdot 220 - 60 = 23 \cdot 218 - 14$$

$$6000 = 23 \cdot 264 - 72 = 23 \cdot 261 - 3 \quad 6233$$

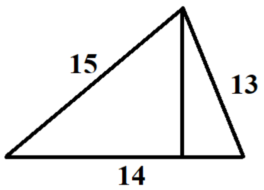
$$8000 = 23 \cdot 354 - 96 = 23 \cdot 350 - 4 \quad 8234$$

Ответ: 2231, 4232, 6233, 8234.

▷ **2.** Даны 84 треугольные плитки со сторонами 13,14,15. Какой наибольший по площади квадрат мастера могут замостить этой плиткой, если разрешается разрезание любой плитки не более, чем три части

Решение:

$$S_{\triangle} = 84$$



$$S = \frac{1}{2} h \cdot 14 = 84,$$

$$h = 12,$$

$$84^2 = 7056.$$

Ответ: 7056.

▷ **3.** Решите уравнение

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4+x}}} = \frac{53}{37}.$$

Решение:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4+x}}} = \frac{53}{37} \Leftrightarrow \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4+x}}} = \frac{16}{37} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4+x}} = \frac{37}{16} \Leftrightarrow \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4+x}} = \frac{5}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{1}{4+x} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4+x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x + 4 = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

▷ **4.** Пусть запись $a \triangle b$ обозначает наименьшее из чисел $a + b$ и $2b$. Решите уравнение $x \triangle 20 = 23 \triangle x$.

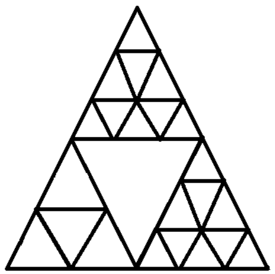
Решение: Запись $x \triangle 20$ может означать либо $2x$ (если $x \geqslant 20$), либо $x+20$(если $x \leqslant 20$). Запись $23 \triangle x$ - либо 46 (если $x \leqslant 46$), либо $46+x$(если $x \geqslant 46$). Поэтому наше уравнение выглядит так: $2x = 46$ (если $20 \leqslant x \leqslant 23$), либо $x + 20 = 46$ (если $x \leqslant 20$), либо $2x = 23 + x$ (если $x \geqslant 23$).
Первое уравнение даёт ответ 13, не отвечающий условию $20 \leqslant x \leqslant 23$, второе - ответ 23, не отвечающий условию $x \leqslant 20$, третье - ответ 23, отвечающий условию $x \geqslant 23$. Следовательно, $x = 23$

Ответ: 23.

▷ **5.** Можно ли разрезать правильный треугольник на 23 правильных треугольника?

Решение: Да, можно. Как это сделать:

$$1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 + 9 = 12 \Rightarrow 11 + 9 = 20 \Rightarrow 19 + 4 = 23$$



Ответ: Да.

▷ **6.** Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр 2023?

Решение:

$$(5 \cdot 10^k + 2023)^2 = 25 \cdot 10^{2k} + 2023 \cdot 10^{k+1} + 2023^2$$

$$2023^2 = 4092529 \quad k = 6$$

$$5002023^2 = 25020234092529$$

Ответ: 5002023.

▷ **7.** Выписаны подряд всё числа от 1 до 60 без пробелов между цифрами 123456789101112...585960. Вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число осталось наибольшим.

Решение: Всего выписано 111 цифр (9 - на однозначные числа и ещё 102 на 51 двузначное число). Значит, после вычёркивания 100 цифр останется 11-ти значное число. Чтобы оно было самым большим, нужно поставить в нём на первое место 9, как и на последующие. Однако девяток в нашей записи всего 6. Если мы выпишем их все, то за последней девяткой цифр будет всего 2. Попробуем оставить девятки только от чисел 9, 19, 29, 39 и 49. Тогда у нас получится такое число: 999995051525354555657585960. От него можно оставить после 99999 ещё 6 цифр. Так как девятку поставить нельзя, поставим самую большую из возможных чисел - 7 (8 нельзя - мало цифр), вычеркнуув всё кроме первой цифры 7, зачеркивая всё, кроме больших цифр. Остаётся: 99999785960 .

Ответ: 99999785960.

▷ **8.** Найти все пары натуральных чисел, разность которых равна 170, а их наименьшее общее кратное 2023.

Решение:

$$a - b = 170 = 17 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{НОК}(a, b) = 2023 = 7 \cdot 17^2$$

$$\text{Пусть} a = xd \ (x, y) = 1$$

$$b = yd$$

$$\begin{cases} d(x - y) = 2 \cdot 5 \cdot 17 \\ x \cdot yd = 7 \cdot 17^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 17 \\ x - y = 10 \\ xy = 7 \cdot 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 17 \\ x = 17 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 289 \\ b = 119 \end{cases}$$

Ответ: 289; 119

▷ **9.** Запишем предложение "Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу". Будем вычёркивать из него слова так, чтобы всякий раз получалось правильное предложение (например, нельзя вычеркнуть слово "четыре но можно вычеркнуть слово "усталых"). Вычеркивать слова можно в любом порядке одно за другим. Сколькими способами можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова?

Решение: Конечное предложение, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова, - это "четыре путника пережидали грозу и поэтому из исходного предложения нужно вычеркнуть 5 слов. Эти слова можно вычеркивать в любом порядке, за исключением одного ограничения: слово "разразившуюся"нельзя вычеркивать раньше слова "внезапно". Таким образом, надо выяснить сколькими различными способами можно поставить в ряд 5 предметов, чтобы первый предмет был всегда раньше второго? Она решается просто: число способов расстановки пяти предметов в ряд равно $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, и из них ровно половина, т.е. 60, удовлетворяют указанному условию. К конечному предложению можно прийти 60 способами.

Ответ: 60.

▷ **10.** Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается 1, или тех, в записи которых её нет?

Решение: Подсчитаем количество чисел от 0 до 999999, в записи которых нет единиц, т.е. сколько можно составить шестизначных чисел из цифр 0, 2, 3, 4, …, 9 (если число имеет менее шести цифр, условимся дописывать слева недостающее число нулей). На первом месте в таком числе может стоять любая из девяти цифр, к каждой из них можно приписать справа любую из тех же девяти цифр: 0, 2, 3, 4, …, 9; таким образом получится 81 двухзначное число из цифр 0, 2, 3, 4, …, 9. Продолжая таким образом, получим 9^6 шестизначных чисел, из них нужно исключить 000000. Таким образом, показано, что среди первого миллиона существуют ровно $9^6 - 1$ чисел, в записи которых нет единиц, т.е. $9^6 - 1 = 531371$.
Таким образом, среди первого миллиона больше чисел, в записи которых нет единиц.